第47卷第1期
2017年1月

浙 江 大 学 学 报(人文社会科学版)
Journal of Zhejiang University (Humanities and Social Sciences)

Vol. 47, No. 1
Jan. 2017

学术快评

DOI: 10.3785/j.issn.1008-942X.CN33-6000/C.2016.04.261

基于哲学逻辑的集合论研究

李 娜

(南开大学 哲学院, 天津 300350)

[摘 要] 20世纪60年代之后,涌现出了尝试以非经典逻辑为基础逻辑来拯救集合论的热潮。在这一时期,诞生了模态集合论、弗协调集合论、直觉主义集合论等一些基于哲学逻辑的集合理论。模态逻辑是在经典逻辑的基础上增加模态算子形成的一种二阶逻辑,因此,它是一种比经典逻辑强的逻辑。模态集合论相对于公理化集合论是一种加强了基础逻辑的公理化集合论。与ZF公理化集合论用公理限制集合的方法不同,弗协调集合论也是一种改变了集合论的基础逻辑,选择了可以容纳或处理矛盾的弗协调逻辑,这样即使集合论中出现矛盾也不会使整个理论陷入不足道的困境。由于在直觉主义逻辑中排中律不成立,所以直觉主义逻辑是一种比经典逻辑弱的逻辑。直觉主义集合论相对于ZF公理化集合论是一种减弱了基础逻辑的公理化集合论。

[关键词] 哲学逻辑; 集合论; 模态集合论; 弗协调集合论; 直觉主义集合论

康托尔(Cantor)用概括原则和外延原则建立了朴素集合论,康托尔朴素集合论(以下简称集合论)的建立给数学带来了新的生机,它产生了与经典数学完全不同的现代数学的两个领域:元数学和结构数学,它们构成了现代数学研究的主要内容。遗憾的是,集合论存在矛盾,其中最著名的是20世纪初罗素(Russell)在集合论中发现的一个矛盾,这个矛盾被后人称作罗素悖论。罗素悖论的出现引起了众多数学家的震惊,并由此引发了第三次数学危机。当时,人们围绕"集合到底是什么"进行了大量争论。要拯救康托尔的朴素集合论,就要消除悖论,为此人们提出了许多方案和方法,其中较早也是最有效的方法是1908年策梅洛(Zermelo)采用希尔伯特(Hilbert)的公理化方法限制康托尔集合论中的概括原则来回避悖论。他把集合论变成一个完全抽象的公理化理论。在这样的理论中,"集合"是一个不定义的概念,它的性质由公理来刻画。该理论后经弗兰克尔(Fraenkel)和斯科伦(Skolem)等人的改进,现在被人们称为ZF公理化集合论。ZF公理化集合论是在带等词"="和属于关系"∈"的经典逻辑基础之上,加上关于集合基本性质的非逻辑公理形成的形式系统。它的非逻辑公理包括:外延公理、空集存在公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、子集公理、无穷公理、替换公理、良基公理(又称正则公理或基础公理)。如果再加上选择公理AC,就得到ZFC。因此,ZF公理化集合论可以简单地看作是在经典逻辑的基础上增加非逻辑公理的一种公理化集合论。

然而,哲学逻辑是各种非经典逻辑分支的统称,它们一般是以经典逻辑为基础,与传统哲学中的概念、范畴和问题有直接或间接的联系。它们大都在20世纪60年代以后逐渐成熟,其中,模态逻辑、直觉主义逻辑和弗协调逻辑等是非经典逻辑中研究历史较长,相对来说也比较成熟的非经典逻辑分支。因此,20世纪60年代之后,许多学者提出:在非经典逻辑的框架中,集合论是否协调?非经典逻辑是否能够拯救集合论?集合论中概括原则的不一致性还有哪些解决的方法和方案?于是,涌现出了尝试以非经典逻辑为基础逻辑来拯救集合论的热潮。在这一时

[收稿日期] 2016-04-26
[在线优先出版日期] 2016-07-31
[基金项目] 国家社科基金重点项目(16AZD036)
[本刊网址·在线杂志] http://www.zjujournals.com/soc
[网络连续型出版物号] CN33-6000/C

[作者简介] 李娜(http://orcid.org/0000-0003-4325-584X),女,南开大学哲学院教授,博士生导师,主要从事现代逻辑研究。

期,诞生了模态集合论、弗协调集合论、直觉主义集合论等一些基于哲学逻辑的集合理论。

在ZF集合论中,子集公理是对集合论中概括原则的一种限制,从而也排除了集合论中出现的罗素悖论。模态逻辑是在经典逻辑的基础上增加模态算子"◊"(称作菱形)形成的一种二阶逻辑,因此,它是一种比经典逻辑强的逻辑。模态集合论相对于公理化集合论是一种加强了基础逻辑的公理化集合论。与ZF公理化集合论用公理限制集合的方法不同,弗协调集合论也是一种改变了集合论的基础逻辑,选择了可以容纳或处理矛盾的弗协调逻辑,这样即使集合论中出现矛盾也不会使整个理论陷入不足道的困境。虽然公理化集合论消解了悖论,但改变了康托尔最初的假定,而弗协调集合论则保留了康托尔集合论中的两个原则。由于在直觉主义逻辑中排中律不成立,所以直觉主义逻辑是一种比经典逻辑弱的逻辑。直觉主义集合论相对于ZF公理化集合论是一种减弱了基础逻辑的公理化集合论。

基于模态逻辑的模态集合论的产生,是以1967年Fitch在《符号逻辑杂志》(*The Journal of Symbolic Logic*)上发表的《一个完全的和一致的模态集合论》为标志,文中给出了一个完全并且一致的模态集合论。此后,还产生了模态策梅洛-弗兰克尔集合论MZF等。模态集合论最初的研究方法是用模态词直接限定集合论中的概括原则。目前,在模态集合论的研究中,既可以直接对集合论的概括原则做修改,也可以在成熟的公理化集合论上做模态化的工作。用模态化的方法研究集合论的成果较多,如1967年Fitch的工作,1980年Kit Fine的工作,1989年Jan Krajicek的工作。2010年以后采用了双模态语言和多元逻辑来研究集合论。

基于弗协调逻辑 $C_n^{=}$ $(1\leqslant n\leqslant\omega)$ 的弗协调集合论的产生,是以1963年Da Costa在《系统的形式不协调(理论)》中构造出的弗协调集合论系统为标志。1982年,Arruda和Batens构造了带罗素集R的弗协调集合论系统,并证明了$\bigcup R$在所有带罗素集(即$\{x:x\notin x\}$)的强弗协调集合论中是全集。1985年,Arruda以蒯因(Quine)的集合论NF为基础,证明了$\bigcup\bigcup R$在任一带罗素集R的弗协调集合论中都是全集,罗素集的存在与分离公理、替换公理模式是不相容的。1986年Da Costa构造弗协调集合论$\mathrm{NF}_i$$(0\leqslant i\leqslant\omega)$,并证明如果$\mathrm{NF}_0$是协调的并且所有的罗素关系(如$\{<x_1,x_2>:<x_1,x_2>\notin x_1\}$和$\{<x_1,x_2>:<x_1,x_2>\notin x_2\}$)存在,那么得到的系统既是一致的,又是足道的。1997年,Caiero和Souza基于蒯因的ML系统和弗协调演算$C_1^{=}$,构造了一个弗协调集合论系统ML_1。他们认为,经典集合论不能证明全集的存在,但全集可以从ML_1的公理中推导出来,并且整个理论不会陷入不足道。2013年,Weber重新刻画了外延原则和集合存在原则,以此构造的弗协调集合论能够容纳罗素集和全集。

基于直觉主义逻辑的直觉主义集合论的产生,是以20世纪70年代Friedman研究的直觉主义的策梅洛-弗兰克尔集合论IZF为标志。1973年,Friedman系统研究了各种直觉主义系统的形式性质,并将克林(Kleene)的可实现性解释扩展到这些系统中。同一年,Friedman在ZF公理化集合论的基础上,通过修正与直觉主义不相容的公理,给出了一个直觉主义的策梅洛-弗兰克尔集合论版本IZF,并且在这篇文章中证明了IZF集合论与ZF公理化集合论有相同的证明论强度。同年,Myhill定义了一种可实现性解释,并且证明了用替换公理代替收集公理的直觉主义策梅洛-弗兰克尔集合论具有析取性质、数字存在性质等。近几年来,Vladimirov系统研究了带有收集模式的直觉主义集合论ZFI2C的各种有效性质。Ray Ming Chen和Michael Rathjen将Lifschitz构造的可实现性扩展到了完整的直觉主义策梅洛-弗兰克尔集合论IZF中,并且利用这一解释在直觉主义集合论中将带有唯一性条件的丘奇(Church)论题和它的一般形式区分开来,同时还得到了一些有趣的推论。Khakhanyan利用扩展到集合论层面的克林的递归可实现性,系统研究了丘奇论题和一致性原则之间的关系。

基于哲学逻辑的集合论研究属于较新的研究领域,而且国外最近几年有许多学者投入到这一领域中,并在《符号逻辑杂志》等国际逻辑学刊物上发表了多篇论文,一些学者甚至还就相关问题产生了激辩和争论。反观国内,基于哲学逻辑的集合论研究这一领域还是一片空白。我们要学习和理解国外这些先进的研究成果,紧跟国际逻辑学、哲学和数学研究的前沿和潮流,吸收、梳理基于哲学逻辑的集合论研究成果,并将这些新的成果引进到国内。这对于开拓我们的视野,掌握国外先进的研究方法和思维方式,甚至进一步开展该领域新的研究,都具有十分重要的意义。

